

Eesti LXIV matemaatikaolümpiaad
TALLINNA KOOLIVOOR
17.jaanuaril 2017.a. Tallinnas
X klass

Lahendamiseks on aega 4 tundi.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik täisarvude paarid $(x;y)$, mille korral kehtib võrdus
$$x(x - 12) - y(y - 12) = 3$$
2. Määra arv k nii, et võrrandi $k^2x^2 + kx^2 - 5kx - 2x^2 + 5x - 5 = 0$ üks lahend oleks teisest lahendist neli korda suurem.
3. Koostati kolm õpirühma. Iga õpilane kuulub vähemalt ühte rühma, aga ükski õpilane ei kuulu kõiki kolme. Õpilased, kes on nii esimeses kui teises rühmas, moodustavad 40% esimese rühma õpilastest ja 30% teise rühma õpilastest. Õpilased, kes kuuluvad kas esimesse või teise rühma (või mõlema) moodustavad 58% kogu õpilastest. $\frac{1}{3}$ esimese rühma õpilastest kuuluvad ka kolmandasse rühma, ning 15% teise rühma õpilastest kuuluvad ka kolmandasse rühma. Kui suure protsendi kogu õpilastest, moodustavad õpilased, kes kuuluvad kolmandasse rühma?
4. Rööpkülikus ABCD nurk $\angle BAD$ on teravnurk. Punkt P on diagonaali AC ja kolmnurga ABD ümberringjoone lõikepunkt. Tõesta, et kolmnurgad ABC ja DPB on sarnased.
5. Malelaua, mille suurus on 2017×2017 , alumises vasakus nurgas on kuningas. Liis ja Maria mängivad mängu, mille eesmärk on jõuda kuningaga malelaua vastasnurka (üleval paremal). Mängija, kelle käigu tulemusena jõuab kuningas sellesse ruutu, loetakse mängu võitjaks. Mängijad käivad kordamööda, ning igal käigul on võimalik teha ühe kolmest liigutusest: üks samm ülesse, üks samm paremale, üks samm diagonaalis (ülesse-paremale). Kes võidab, kui esimesena käib Liis ja mõlemad mängijad mängivad optimaalse strateegia järgi?